Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi
2006. május 29.

*Megoldásait mindig indokolja meg (kivétel ez alól az 1. feladat (c) része). A 3., 4., 5. és 6. feladatnál felhasználható bármely, az előadáson elhangzott állítás.*

1. (a) Adja meg a következő fogalmak definícióját: bináris fa, bináris keresőfa, AVL-fa.
   (b) Adjon alsó és felső becslést egy $n$ csúcsú bináris keresőfa szintszámára! Indokolja is válaszát.
   (c) Nagyságrendileg hány szintje van egy $n$ csúcsú AVL-fának? (Itt indoklás nem szükséges.)
2. Bizonyítsa be, hogy a Karp-redukció tranzitív: ha $L_1 \prec L_2$ és $L_2 \prec L_3$, akkor $L_1 \prec L_3$.
3. Igaz-e, hogy a 2-SZÍN nyelv (a 2 színnel színezhető gráfok nyelve) benne van co EXPTIME-ban?
4. Legyen $k$ pozitív egész szám, $A[1:n]$ pedig egy olyan tömb, melyben 1 és $M$ közötti különböző egész számokat tárolunk, nem feltétlenül rendezetten. Egy $(j,i)$ számpárra azt mondjuk, hogy $k$-as hézag az $A$ tömbben, ha $A[i]-A[j] \geq k$ és $A[j]$ és $A[i]$ közé nem esik másik $A$-beli elem (azaz nincs olyan $1 \leq \ell \leq n$ index, melyre $A[j] < A[\ell] < A[i]$ állna). Adjon $O(n + \lfloor M/k \rfloor)$ lépést használó algoritmust, ami adott $k$ és $A$ esetén talál egy $k$-as hézagot $A$-ban vagy ha nincs ilyen, akkor azt jelzi. (Például, ha a $\boxed{14 \mid 15 \mid 23 \mid 20}$ tömbben keresünk 5-ös hézagot, akkor a válasz $(2,4)$.)
5. A közös $I$ ábécé feletti $L_1, L_2, \ldots, L_k$ nyelvekről (ahol $k \geq 1$ egész szám) tudjuk, hogy
   (a) páronként diszjunktak (azaz $L_i \cap L_j = \emptyset$, ha $i \neq j$),
   (b) uniójuk kiadja az összes szót (azaz $L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_k = I^*$) és
   (c) rekurzívan felsorolhatóak (azaz $L_i \in \mathrm{RE}$ ha $1 \leq i \leq k$).
   Bizonyítsa be, hogy ekkor mindegyik $L_i$ nyelv rekurzív.
6. Éllistájával adott egy $n$ csúcsú, $e$ élű egyszerű, irányítatlan $G$ gráf. Tudjuk, hogy $G$-ben van $K > n/2$ elemszámú független ponthalmaz. Adjon algoritmust, ami $O(n+e)$ lépésben talál egy $2K-n$ méretű független ponthalmazt $G$-ben. (Segítség: használjunk fel egy tanult közelítő gráfalgoritmust.)