1. Tegyük fel, hogy van egy számítógépes programunk, ami egy k méretű feladaton a jelenlegi gépünkön 1 nap alatt fut le. Beszereztünk egy százszor gyorsabb számítógépet. Ugyanazon programmal mekkora feladatot lehet az új gépen egy nap alatt megoldani, ha a program lépésszáma n méretű feladat esetén
(a) n-nel,
(b) n^3-bel,
(c) 2^n-nel arányos?

2. Az alábbi függvényeket rendezze olyan sorozatba, hogy ha f_i után közvetlenül f_j következik a sorban, akkor $f_i(n) = O(f_j(n))$ teljesüljön! Indokolja is meg, miért jó a választott sorrend!
$$f_1(n) = 8n^{2.5}, \quad f_2(n) = 5\sqrt{n} + 1000n, \quad f_3(n) = 2^{\log^2 n}, \quad f_4(n) = 2007n^2 \log n.$$

3. Jelölje egy algoritmus maximális lépésszámát az n hosszú bemeneteken $L(n)$. Azt tudjuk, hogy minden $n > 3$ egész számra $L(n) \leq L(n-1) + \frac{n}{2}$ teljesül, és hogy $L(3) = 3$. Következik-e ebből, hogy az algoritmus lépésszáma $O(n^2)$?

Házi

4. Egy $\mathcal{A}$ algoritmusról azt tudjuk, hogy az n hosszú bemeneteken a lépésszáma $O(n \log n)$. Lehetséges-e, hogy
(a) van olyan x bemenet, amin a lépésszáma $|x|^3$?
(b) minden x bemeneten legfeljebb $2007|x|$ lépést használ?
(Szokás szerint $|x|$ az x szó hosszát jelöli.)

5. Jelölje egy algoritmus maximális lépésszámát az n hosszú bemeneteken $T(n)$. Azt tudjuk, hogy minden $n > 1$ egész számra $T(n) \leq T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n$ teljesül, és hogy $T(1) = 1$ és azt is tudjuk, hogy a $T(n)$ függvény nem csökkenő. Bizonyítsa be, hogy az algoritmus lépésszáma $O(n \log n)$.

Gondolkodtató

6. Hány összehasonlítással lehet megtalálni n elem közül a legkisebbet?

7. Egy $2 \times n$-es sakktábla mezőin n piros és $n-1$ kék négyzetet helyezünk el. Ezeket olyan módon akarjuk átrendezni, hogy a felső sorban piros, az alsóban kék négyzetek legyenek, s a bal alsó sarok maradjon üres. Ehhez egy-egy lépés során az üres mezőre tolhatjuk valamelyik szomszédját. Bizonyítsuk be, hogy ehhez
(a) $O(n^2)$ lépés elégséges és
(b) $\Omega(n^2)$ lépés szükséges.

8. Bizonyítsuk be, bármely algoritmus, mely az inputként adjacencia mátrixával megadott $n \geq 3$ pontú irányítatlan gráfról eldönti, hogy erdő-e (azaz, hogy körmentes-e), kedvezőtlen esetben meg kell hogy tekintse az adjacencia mátrix $\binom{n}{2}$ elemét. ("Minden egyes pontpárról le kell kérdezni, hogy éle-e a gráfnak.")

9. Adott n chip, melyek képesek egymás tesztelésére a következő módon: ha összekapcsolunk két chipet, mindkét chip nyilatkozik a másikról, hogy hibásnak találta-e. Egy hibátlan chip korrektül felismeri, hogy a másik hibás -e, míg egy hibás chip akármilyen választ adhat. Tegyük fel, hogy a chipek több, mint a fele korrekt. Adjunk algoritmust, mely n-nél kevesebb fenti tesztet használva kikeres egy jó chipet.

Gyakorló

10. Legyen f és g két, a pozitív számokat a pozitív számokba képező függvény. Tudjuk, hogy $f(x) = O(h(x))$ és $g(x) = O(h(x))$. Igaz-e, hogy
(a) ha f monoton növő és $h(x) = 3x$, akkor $f(g(x)) = O(h(x))$;
(b) $f(g(x)) = O(h(x))$ minden h függvényre?

11. Az $\mathcal{A}$ algoritmusról azt tudjuk, hogy összefüggő gráfokon $O(n + e)$ lépést tesz. Mutassa meg, hogy az is igaz, hogy összefüggő gráfokon az algoritmus lépésszáma $O(e)$.

12. Jelölje egy algoritmus maximális lépésszámát az n hosszú bemeneteken $L(n)$. Azt tudjuk, hogy minden $n = 2k > 4$ páros számra $L(2k) \leq L(2k-2) + 1$ teljesül, és hogy $L(4) = 10$. Következik-e ebből, hogy az algoritmus lépésszáma $O(n)$?

13. Igaz-e, hogy
(a) ha $f = O(g)$ és $g = O(h)$, akkor $f = O(h)$?
(b) ha $f = \Omega(g)$ és $g = \Omega(h)$, akkor $f = \Omega(h)$?