

# Algoritmusok elmélete

## 14. gyakorlat

2008. május 16.

1. P-beli vagy NP-teljes az alábbi  $L$  nyelv?  
 $L = \{G \text{ gráf} : \text{csúcsai 3 színnel kiszínezhetők úgy, hogy mindhárom színosztályba ugyanannyi csúcs tartozzon}\}.$
2. Jelölje  $H$  a Hamilton-körrel rendelkező irányítatlan gráfok nyelvét,  $2KÖR$  pedig az olyan irányítatlan gráfokét, melyeknek csúcsai lefedhetőek két darab, közös pontot nem tartalmazó körrel. Igazolja, hogy létezik  
(a)  $H \prec 2KÖR$  Karp-redukció  
(b)  $2KÖR \prec H$  Karp-redukció.
3. Bizonyítsa be, hogy a következő algoritmus polinom időben meghatároz egy olyan lefogó pont-halmazt egy tetszőleges irányítatlan  $G$  gráfban, melynek mérete legfeljebb kétszerese egy, a  $G$ -ben levő, minimális elemszámú lefogó pont-halmazénak! (Azaz lássa be, hogy ez egy 2-közelítő algoritmus.) Algo: keressünk tovább nem bővíthető független élhalmazt  $G$ -ben és válasszuk az ezen élek által lefedett pontokat.
4. Van  $n$  fájlunk, az  $i$ -edik fájl hosszát jelölje  $h_i$ . Tegyük fel, hogy a fájlok a hosszuk szerint nem csökkenő sorrendben követik egymást, azaz  $0 < h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_n$ . Mentéskor két egyforma méretű lemez áll rendelkezésünkre. A mentésnek sorban kell történnie, előbb az első fájlról kell megmondani, melyik lemezre kerüljön, azután a másodikról, stb. (Fájlokat szétvágni nem szabad, minden fájl teljes egészében kerül az egyik vagy a másik lemezre.) Amikor a soron következő fájl már egyik lemezre se fér rá, akkor abbahagyjuk az eljárást. Egy ilyen eljárás optimális, ha a lehető legtöbb fájl lehet segítségével kimenteni.  
Mutassa meg, hogy az a mohó eljárás, amikor a következő fájl oda tesszük, ahol több hely van, nem feltétlenül optimális. Legfeljebb hány fájllal fogunk kevesebbet kimenteni ezzel a mohó eljárással az optimális (szintén sorrendben mentő) megoldáshoz képest?
5. Mutassa meg, hogy az alábbi  $L$  nyelv P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes:  
 $L = \{(G, k) : \text{a } G \text{ gráfban minden pont fokszáma kisebb mint a pontok számának fele, és } G \text{-ben van } k \text{ független pont}\}.$
6. A ládapakolás feladatban tudjuk hogy az érkező tárgyak mérete kisebb mint  $1/k$ , ahol  $k \geq 3$  egész szám. Adjon polinom idejű algoritmust, ami legfeljebb  $\frac{k}{k-1} \text{ OPT} + 1$  darab ládát használ, amikor a legjobb pakolás  $\text{OPT}$  darab ládát igényel.
7. Éllistájával adott egy  $n$  csúcsú,  $e$  élű egyszerű, irányítatlan  $G$  gráf. Tudjuk, hogy  $G$ -ben van  $K > n/2$  elemszámú független pont-halmaz. Adjon algoritmust, ami  $O(n + e)$  lépésben talál egy  $2K - n$  méretű független pont-halmazt  $G$ -ben.  
(Segítség: használjuk fel az 1. feladat algoritmusát és eredményét.)