

Algoritmusok elmélete

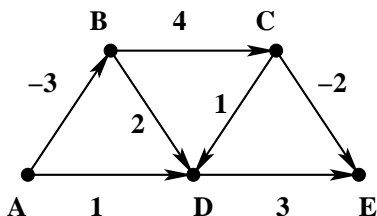
3. gyakorlat

2008. február 29.

- Adjuk meg az összes olyan minimális élszámú irányított gráfot (élsúlyokkal együtt), amely(ek)re az alábbi táblázat a Dijkstra-algoritmusban szereplő $D[\]$ tömb változásait mutathatja. Adja meg a legrövidebb utakat tartalmazó $P[\]$ tömb állapotait is.

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
0	2	6	∞	∞	7
0	2	5	9	∞	6
0	2	5	6	9	6
0	2	5	6	8	6
0	2	5	6	7	6

- Határozza meg az A csúcsból az összes többi csúcsba vezető legrövidebb út hosszát az alábbi gráfban:



- A mátrixával adott G irányított gráf élei között van egy negatív súlyú él, a többi él súlya pozitív. A gráfban nincs negatív súlyú kör. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust az $s \in V(G)$ pontból az összes többi pontba vezető legrövidebb utak meghatározására.
- Legyen $G = (V, E)$ mátrixszal adott n -pontú, súlyozott élű irányított gráf. Tegyük fel, hogy G nem tartalmaz negatív összhosszúságú irányított kört, továbbá azt, hogy a G -beli egyszerű irányított utak legfeljebb 25 élből állnak. Javasoljunk $O(n^2)$ költségű módszert az $1 \in V$ pontból az összes további $v \in V$ pontokba vivő legrövidebb utak hosszának a meghatározására.
- Adj $O(n^4)$ futási idejű algoritmust, amely egy mátrix segítségével adott n pontú irányítatlan, nemnegatív élsúlyokkal ellátott gráfban megtalálja a legrövidebb összhosszúságú kört (ami egy ponton nem mehet át kétszer).

Házi feladat

- Nyári utazásunkra valutát akarunk váltani. A pénzváltó n különböző valutával foglalkozik, a j . fajta 1 egységéért r_{ij} -t kell fizetni az i . pénznemben. (Pl. ha a j . a dollár, az i . a forint, akkor most $r_{ij} = 222$ lehet.) Az r_{ij} tömb felhasználásával adjon $O(n^3)$ lépéses algoritmust, amely minden valutapárra meghatározza, hogy mi az elérhető legjobb átváltási arány, ha feltesszük, hogy az átváltásokért nem számolnak fel külön költséget. (Az i -ről a j -re való átváltás történhet több lépcsőben is, érdemes lehet előbb i -ről k_1 -re konvertálni, onnan k_2 -re, stb és végül j -re.)

Gyakorlók, az első kettő egyszerű, a többi gondolkodtatóbb

- A 2. feladatban adott gráfban határozza meg Floyd módszerével az összes pontpárra a legrövidebb utak hosszát!

Egy irányított gráf csúcshalmaza $\{a, b, c, d, e, f\}$, az élek és súlyaik pedig a következők: $s(a, b) = 6$, $s(a, c) = 5$, $s(a, e) = 8$, $s(b, a) = 5$, $s(b, e) = 1$, $s(b, f) = 2$, $s(c, b) = 2$, $s(c, f) = 4$, $s(e, b) = 6$,

$$s(e, d) = 3, s(f, d) = 1, s(f, e) = 1.$$

- a) Dijkstra-algoritmussal határozza meg a -ból az összes többi pontba vezető legrövidebb út hosszát. (Indokolni nem kell, de lépésenként írja fel a távolságokat tartalmazó D tömb és a KÉSZ halmaz állapotát.)
- b) Vegyük hozzá a gráfhoz az (b, d) élet. Milyen $s(b, d) \geq 0$ súlyok esetén változnának meg ezzel a legrövidebb utak hosszai?
- c) Egy él súlyát 1-gyel csökkentjük (az eredeti gráfban, ahol (b, d) él még nincsen). Mely élek esetében nem változnak meg ezzel az a -tól mért távolságok?
8. Vidéken autózunk, ahol benzinkút csak bizonyos falvakban van. Az A falubeli benzinkúttól indulunk és a B faluba akarunk elérni (ahol szintén van benzinkút). A falvak közötti utakat egy n csúcsú e élű, összefüggő, irányítatlan gráf írja le, melynek csúcsai a falvak, az élek pedig a falvak közötti utakat jelentik, egy él súlya a két falut összekötő útszakasz hossza. A gráf az éllistájával adott, és ezen kívül adott még az a k falu, amelyben van benzinkút. Adjon $O(kn \log n)$ lépésszámú algoritmust, amely meghatározza az A -ból B -be vivő legrövidebb olyan útvonalat, melynek során soha nem kell 600 kilométernél többet autózunk két benzinkút között.
9. Éllistával adott az n pontú $G(V, E)$ gráf, melynek minden e éle egy $c(e) > 0$ élsúllyal van ellátva. Egy adott $s \in V$ csúcsból akarunk egy adott $t \in V$ csúcsba eljutni a legolcsóbb módon, de az út költségét a szokásostól eltérően számoljuk: ha az e él az út s -től számított k -edik éle, akkor $k \cdot c(e)$ költséggel járul hozzá az út költségéhez. Adjon algoritmust, ami az ilyen értelemben vett legolcsóbb út költségét $O((n(n + |E|) \log n))$ lépésben.