11. gyakorlat
Mélységi bejárás, DAG

1. Az éllistájával adott alábbi G irányított gráfot járja be mélységi bejárással, az a csúcsból indulva, adja meg a mélységi és befejezési számokat és osztályozza gráf éleit. G: a:b,c; b:-; c:d,e,f; d:f,g; e:b; f:-; g:h; h:d,b.

2. Éllistájukkal adottak az alábbi G_1 és G_2 irányított gráfok (zárójelben az élsúlyok).
G_1: a:b(3),c(8); b:d(-7); c:d(5); d:e(2); e:a(-10);
G_2: a:g(2),f(10); b:a(-2),g(1); c:-; d:-; e:c(5),d(6); f:e(7); g:f(1), e(8);
(a) Döntsük el mélységi bejárás segítségével, hogy ezek a gráfok DAG-ok-e!
(b) Amelyik gráf DAG, abban adjunk meg egy topologikus sorrendet, határozzuk meg az a jelű csúcsból a c-be vezető legrövidebb út hosszát és számítsuk ki a gráfban levő leghosszabb út hosszát is.

3. A 6 pontú G gráf csúcsait jelölje x, y, z, u, v, w. A gráf egy mélységi bejárásánál a mélységi, ill. a befejezési számok a következők: x: 1,6; y: 2,4; z: 6,5; u: 3,3; v: 4,1; w: 5,2. Adjuk meg a bejáráshoz tartozó mélységi feszítőfa éleit. Rekonstruálható-e G az előző számok ismeretében? [ZH régen]

4. Cirkuszi akrobaták egymás vállára állva minél nagyobb tornyot szeretnének létrehozni (a toronyban minden szinten csak egy akrobata lesz). Esztétikai és gyakorlati szempontok miatt egy ember vállára csak olyan állhat, aki nála alacsonyabb és könnyebb is. A cirkuszban n akrobata van, adott mindegyikük magassága és súlya. Adjon algoritmust, amely $O(n^2)$ lépésben megadja a lehetséges legtöbb emberből álló torony összeállítását. [ZH 2005. 04. 08./5]

5. Éllistával adott egy G gráf, melynek n csúcsa és e éle van. A gráf minden csúcsához hozzá van rendelve egy 1 és k közötti egész szám (címke). Találjunk (ha létezik) olyan *tarka* utat a gráfban, amelyben minden $1 \le i \le k$ címke pontosan egyszer fordul elő. Az algoritmus lépésszáma legyen $O(k!\,(e+n))$.[ZH 2003. 05. 30./4]

6. Adjunk algoritmust, mely egy éllistával megadott irányítatlan gráfban vagy talál egy kört, vagy igazolja a gráf körmentességét $O(|V|)$ időben (függetlenül attól, hogy $|E|$ akár sokkal nagyobb is lehet, mint $|V|$)! [ZH régen]

---

7. [ZH 2006. 04. 07./3] Legyen G egy irányítatlan összefüggő gráf. Igaz-e, hogy
(a) G minden f éléhez van G-nek olyan mélységi bejárása, amelyben f egy faél?
(b) G minden f éléhez van G-nek olyan szélességi bejárása, amelyben f egy faél?
(c) G minden F feszítőfájához van G-nek olyan mélységi bejárása, amelyben F minden éle faél?
(d) G minden F feszítőfájához van G-nek olyan szélességi bejárása, amelyben F minden éle faél?

8. Éllistával adott a G gráf, ami egy n pontú és $e \ge n-1$ élű DAG. Adjon $O(n\,e)$ lépésszámú algoritmust, ami minden i, j pontpárra meghatározza az i-ből j-be vezető utak számát. [ZH 2007. 05. 22.]

9. Van n fájlunk, az i-edik fájl hosszát jelölje a h_i. Tegyük fel, hogy a h_i számok egészek. Mentéshez két egyformán L méretű lemez áll rendelkezésünkre (L pozitív egész szám). A cél, hogy minél nagyobb k számra az első k darab fájl mindegyikét mentsük ki a lemezekre (a fájlok sorrendje rögzített). Fájlokat szétvágni nem szabad, minden fájl teljes egészében kerül az egyik vagy a másik lemezre. Adjon algoritmust, ami adott L és h_i számokhoz meghatározza, hogy melyik fájlt melyik lemezre tegyük ahhoz, hogy k a lehető legnagyobb legyen. Az algoritmus lépésszáma legyen $O(L^2)$. [ZH 2006. 06. 26./6]

10. Egy számítógéphálózatban n számítógép van. Minden olyan eseményt, hogy az i-edik gép üzenetet küld a j-ediknek (i, j, t) formában feljegyezünk, ahol a t egész szám az üzenet küldésének időpontját jelöli. Ugyanabban a t időpontban egy gép több gépnek is küldhet üzenetet. Ha a t időpontban az i-edik gép vírusos volt, akkor egy (i, j, t) üzenet hatására a j-edik gép megfertőződhet, ami azt jelenti, hogy a $t+1$ időponttól kezdve már a j-edik gép is vírusos lehet. Legyen adott az (i, j, t) hármasoknak egy m hosszú listája, valamint x, y és $t_0 < t_1$ egész számok. Azt kell eldöntenünk, hogy ha az x-edik gép a t_0 időpontban vírusos volt, akkor lehet-e emiatt az y-adik gép a t_1 időpontban vírusos. Adjon algoritmust, ami ezt a kérdést $O((t_1 - t_0)n + m)$ lépés után megválaszolja. [ZH 2007. 06. 12.]