

13. gyakorlat
P, NP, coNP, Karp-redukció

1. Bizonyítsa be, hogy az alábbi P_1 , P_2 , P_3 és P_5 eldöntési problémák NP-beliek, a P_4 pedig coNP-beli. Melyekről tudja belátni, hogy P-ben vannak?
 P_1 : adott G páros gráf és k pozitív egész esetén van-e G -ben k élből álló párosítás?
 P_2 : adott G irányítatlan gráfban van-e Euler kör?
 P_3 : adott G irányítatlan gráf és k pozitív egész esetén van-e G -ben k darab független pont?
 P_4 : adott m egész szám prím-e?
 P_5 : adott (s_1, \dots, s_n) pozitív egészek és adott b egész pozitív szám esetén ki lehet-e választani néhány s_i -t, melyek összege b ?
 2. Adjon Karp-redukciót a 3-SZÍN eldöntési problémáról a 4-SZÍN eldöntési problémára!
-
3. Bizonyítsa be, hogy P-beli a következő eldöntési probléma: egy adott 4 színnel színezhető G gráf csúcsai kiszínezhetőek-e a piros, kék, zöld, sárga színekkel úgy, hogy pontosan egy csúcs legyen piros és pontosan két csúcs kék.
 4. A G irányítatlan gráf minden x pontjához tartozik egy $s(x)$ súly. Célunk, hogy olyan feszítőfát találjunk a gráfban, amiben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális. Fogalmazza meg a feladathoz tartozó eldöntési problémát, majd adjon Karp-redukciót a H-út feladatról erre a problémára.
 5. Tegyük fel, hogy van egy olyan X eljárásunk, ami egy input G gráfra és k számra 1 lépés alatt megmondja, hogy van-e G -ben legalább k méretű független ponthalmaz.
(a) Tervezz olyan, a X eljárást használó algoritmust, ami polinom időben kiszámolja $\alpha(G)$ -t, a független pontok maximális számát!
(b) Tervezz olyan, a X eljárást használó algoritmust, amely polinom időben talál egy $\alpha(G)$ méretű független ponthalmazt!
-
6. Bizonyítsa be az alábbi két problémáról, hogy NP-beliek. Melyikről tudja belátni, hogy P-ben van? Melyikről látja, hogy coNP-beli?
 P_1 : adott G irányítatlan gráfban van-e legfeljebb 100 élből álló kör?
 P_2 : adott G irányítatlan gráf és k pozitív egész esetén van-e G -ben legfeljebb k élből álló kör?
 7. Tegyük fel, hogy van egy X programunk, amely egy n csúcsú G gráfról egy időegység alatt megmondja, hogy az kiszínezhető-e 3 színnel. Tervezz olyan X -t használó algoritmust, amely polinom időben megtalálja G egy 3 színnel való színezését (ha van ilyen egyáltalán)!
 8. A $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráfban legyen $X \subseteq V$ és $\overline{X} = V - X$ az X halmaz komplementere. Jelölje $m(X)$ az olyan élek számát, melyek X és \overline{X} között futnak. Legyen *maxvágás* az az eldöntési feladat, hogy adott G gráf és k egész szám esetén létezik-e olyan X részhalmaza a csúcsoknak, hogy $m(X) \geq k$ és legyen *maxfelezés* az az eldöntési feladat, hogy adott G gráf és k egész szám esetén létezik-e olyan X részhalmaza a csúcsoknak, hogy $m(X) \geq k$ és $|X| = |\overline{X}|$.
Igazolja, hogy *maxvágás* \prec *maxfelezés*.