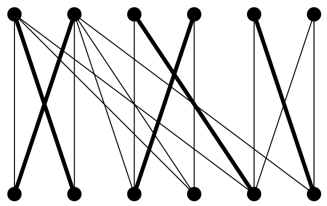
Csima Judit
csima@cs.bme.hu

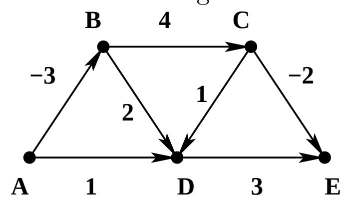
4. gyakorlat
Szélességi bejárás, Bellman-Ford és Floyd algoritmusok

1. Adott a G irányítatlan gráf a következő éllistával : a:b,c; b:a,d; c:a,d; d:b,c,e,f; e:d,f,g; f:d,e,g,h; g:e,f,h; h:f,g; Keressünk G-ben a-ból kiinduló szélességi feszítőfát! Mennyi lesz a csúcsok a-tól való távolsága?

2. Keressen javítóutat az alábbi páros gráfban!



3. Határozza meg az A csúcsból az összes többi csúcsba vezető legrövidebb út hosszát az alábbi gráfban a Bellman-Ford algoritmussal:



---

4. Éllistával adott a súlyozott élű $G = (V, E)$ gráf. Tegyük fel, hogy az élek súlyai az 1,2,3 számok közül valók. Javasoljunk $O(n + e)$ költségű algoritmust az $s \in V$ pontból az összes további $v \in V$ pontokba vivő legrövidebb utak hosszának a meghatározására. (Itt n a G gráf csúcsainak, e pedig az éleinek a száma.

5. Egy $n \times n$-es sakktábla néhány mezőjén az ellenfél egy huszárja (lova) áll. Ha mi olyan mezőre lépünk, ahol az ellenfél le tud ütni, akkor le is üt, de egyébként az ellenfél nem lép. Valamelyik mezőn viszont a mi huszárunk áll. Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza, hogy mely másik mezőkre tudunk (lólépések sorozatával) eljutni a nélkül, hogy az ellenfél leütne!

6. Egy n pontú teljes gráf csúcsait kell kiszíneznünk csupa különböző színűre. Összesen $k \geq n$ féle szín áll rendelkezésre, de az egyes pontok színe nem teljesen tetszőleges. Minden v csúcshoz adott színeknek egy $S(v)$ listája, a v csúcsot csak az $S(v)$-ben szereplő színek valamelyikére színezhetjük. Adjon $O(nk^2)$ lépésszámú algoritmust, amely az $S(v)$ listák alapján eldönti, hogy van-e a megkötéseknek megfelelő színezés, és ha van ilyen, talál is egyet.

---

7. Határozza meg a legrövidebb utak hosszát az A csúcsból az alábbi gráfban, a Bellman-Ford algoritmust futtatva. Lépésenként jelezze, hogyan változik az algoritmus által kitöltött T tömb.
A:B(3),F(1),E(12); B:C(2); C:D(4),G(2); D:E(1); E:C(-3); F:B(-1),G(4),; G:H(2); H:D(2),E(1).

8. Nyári utazásunkra valutát akarunk váltani. A pénzváltó n különböző valutával foglalkozik, a j. fajta 1 egységéért r_{ij}-t kell fizetni az i. pénznemben. (Pl. ha a j. a dollár, az i. a forint, akkor most $r_{ij} = 222$ lehet.) Az r_{ij} tömb felhasználásával adjon $O(n^3)$ lépéses algoritmust, amely minden valutapárra meghatározza, hogy mi az elérhető legjobb átváltási arány, ha feltesszük, hogy az átváltásokért nem számolnak fel külön költséget. (Az i-ről a j-re való átváltás történhet több lépcsőben is, érdemes lehet előbb i-ről k_1-re konvertálni, onnan k_2-re, stb és végül j-re.)

9. A $G(V, E)$ összefüggő, irányított gráf minden éle az $1, 2, \ldots, k$ számok valamelyikével van súlyozva. Egy út értéke legyen az úton található élek súlyainak *maximuma*. Határozza meg, hogy ha adott két csúcs $x, y \in V$, akkor mennyi a lehető legkisebb értékű x-ből y-ba vezető út értéke. Ha G éllistával adott és e éle van, akkor a lépésszám legyen $O(e \log k)$.

10. A 3. feladatban adott gráfban határozza meg Floyd módszerével az összes pontpárra a legrövidebb utak hosszát!

11. Legyen $G = (V, E)$ mátrixszal adott n-pontú, súlyozott élű irányított gráf. Tegyük fel, hogy G nem tartalmaz negatív összhosszúságú irányított kört, továbbá azt, hogy a G-beli egyszerű irányított utak legfeljebb 25 élből állnak. Javasoljunk $O(n^2)$ költségű módszert az $1 \in V$ pontból az összes további $v \in V$ pontokba vivő legrövidebb utak hosszának a meghatározására.

12. Kutyasétáltatáskor egy parkban egy gazda egy rögzített, egyenes szakaszokból álló útvonalon halad, aminek töréspontjai $t_1, \ldots, t_n$, a bejáratot jelölje t_0, a kijáratot t_{n+1}. A kutyája szabadon szaladgál, de a t_i pontokban találkozik a gazdájával. A t_i és t_{i+1} pontokban való találkozás között a kutya szeretne egy fát is meglátogatni (minden $i = 0, 1, \ldots, n$ esetén legfeljebb egyet-egyet). Legyenek adottak az $s(t_i, t_{i+1})$ távolságok ($0 \leq i \leq n$), valamint minden fának az összes t_i ponttól vett távolsága. Tegyük fel, hogy két találkozás között a kutya legfeljebb kétszer akkora távolságot tud megtenni, mint a gazda. Adjon algoritmust, ami segít a kutyának eldönteni, hogy mikor melyik fát látogassa meg ha a kutya célja, hogy minél több fánál járjon. Az algoritmus lépésszáma legyen $O(n^2 f + nf^2)$, ahol f a parkban levő fák számát jelöli.