# 5. gyakorlat
## Dijkstra algoritmusa mátrixosan; Kupac

1. Egy irányított gráf csúcshalmaza $\{a, b, c, d, e, f\}$, az élek és súlyaik pedig az alábbiak: $s(a, b) = 5$, $s(a, e) = 6$, $s(b, c) = 4$, $s(b, d) = 6$, $s(c, a) = 3$, $s(c, d) = 1$, $s(d, e) = 2$, $s(e, c) = 2$, $s(e, f) = 1$, $s(f, b) = 3$, $s(f, c) = 1$, $s(f, d) = 1$.
   a) Dijkstra módszerével határozza meg $a$-ból az összes többi csúcsba vezető legrövidebb út hosszát. (Indokolni nem kell, de látszódjon, lépésenként hogyan változik a távolságokat tároló $D$ tömb és a KÉSZ halmaz.)
   b) Egy él súlyát 1-gyel csökkentjük. Mely élek esetében nem változnak meg ezzel az $a$-tól mért távolságok?

2. (a) Építsen kupacot az órán tanult lineáris idejű módszerrel az alábbi tömbből: $31, 6, 50, 7, 2, 51$.
   (b) Szúrja be az így kapott tömbbe az 1, majd ezután az 5 számot.
   (c) Hajtson végre két egymást követő MINTÖR-t az így kapott kupacon.

---

3. Adjuk meg az összes olyan minimális élszámú irányított gráfot (élsúlyokkal együtt), amely(ek)re az alábbi táblázat a Dijkstra–algoritmusban szereplő D[ ] tömb változásait mutathatja. Adja meg a legrövidebb utakat tartalmazó P[ ] tömb állapotait is.

| $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 6 | $\infty$ | $\infty$ | 7 |
| 0 | 2 | 5 | 9 | $\infty$ | 6 |
| 0 | 2 | 5 | 6 | 9 | 6 |
| 0 | 2 | 5 | 6 | 8 | 6 |
| 0 | 2 | 5 | 6 | 7 | 6 |

4. A kezdetben üres kupacba egyenként szúrunk be $n$ elemet. Igazolja, hogy előfordulhat, hogy a beszúrások során végzett összehasonlítások száma $\Omega(n \log n)$.

5. A mátrixával adott $G$ irányított gráf élei között van egy negatív súlyú él, a többi él súlya pozitív. A gráfban nincs negatív súlyú kör. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust az $s \in V(G)$ pontból az összes többi pontba vezető legrövidebb utak meghatározására.

6. Adjunk hatékony algoritmust egy kupac tizedik legkisebb elemének a megtalálására. Elemezzük a módszer költségét.

---

7. Egy irányított gráf csúcshalmaza $\{a, b, c, d, e, f\}$, az élek és súlyaik pedig a következőek: $s(a, b) = 6$, $s(a, c) = 5$, $s(a, e) = 8$, $s(b, a) = 5$, $s(b, e) = 1$, $s(b, f) = 2$, $s(c, b) = 2$, $s(c, f) = 4$, $s(e, b) = 6$, $s(e, d) = 3$, $s(f, d) = 1$, $s(f, e) = 1$.
   a) Dijkstra-algoritmussal határozza meg $a$-ból az összes többi pontba vezető legrövidebb út hosszát. (Indokolni nem kell, de lépésenként írja fel a távolságokat tartalmazó $D$ tömb és a KÉSZ halmaz állapotát.)
   b) Vegyük hozzá a gráfhoz az $(b, d)$ élet. Milyen $s(b, d) \geq 0$ súlyok esetén változnának meg ezzel a legrövidebb utak hosszai?
   c) Egy él súlyát 1-gyel csökkentjük (az eredeti gráfban, ahol $(b, d)$ él még nincsen). Mely élek esetében nem változnak meg ezzel az $a$-tól mért távolságok?

8. Egy városban teherautóval akarunk az $A$ pontból a $B$ pontba eljutni. Az úthálózatot ismerjük: bármely két csomópontra adott, hogy van-e közöttük közvetlen út (amelyik nem megy át más csomóponton) és ha igen, akkor milyen magas járművek haladhatnak át rajta anélkül, hogy egy híd vagy felüljáró alá beszorulnának. Az utak kétirányúak, a magasságra vonatkozó feltétel nem függ attól, milyen irányban akarunk haladni. Jelölje $n$ a csomópontok számát. Miután megpakoltuk a teherautót és lemértük a magasságát, határozzuk meg $O(n^2)$ lépésszámú eljárással, hogy el tudunk-e jutni $A$-ból $B$-be.

9. Igazoljuk, hogy egy $n$ elemből álló bináris kupac felépítése $\Omega(n)$ összehasonlítást igényel!

10. (a) Építsen kupacot az órán tanult lineáris idejű módszerrel az alábbi tömbből: $4, 3, 5, 21, 2, 7, 12, 6$.
    (b) Szúrja be az így kapott tömbbe az 1 számot.
    (c) Hajtson végre két egymást követő MINTÖR-t az így kapott kupacon.

11. A $G = (V, E)$ irányított gráfban a csúcsok egy része fontos, ezeknek a csúcsoknak a halmaza az $\emptyset \neq F \subseteq V$. A gráf minden éléhez tartozik egy pozitív élsúly. Az $u \in F$ fontos csúcs távolsága a $v \in F$ fontos csúcstól a legrövidebb olyan $u$-ból $v$-be menő út hossza, aminek nincs $u$-tól és $v$-től különböző fontos csúcsa. Legyen a gráf a mátrixával adott, és minden csúcsra adott az is, hogy fontos csúcs-e. Adjon algoritmust ami $O(|V|^2|F|)$ lépésben meghatározza az összes fontos csúcspár közötti távolságot!

12. Adj $O(n^4)$ futási idejű algoritmust, amely egy adott $n$ pontú irányítatlan, nemnegatív élsúlyokkal ellátott gráfban megtalálja a legrövidebb összhosszúságú kört (ami egy ponton nem mehet át kétszer).