8. gyakorlat
Bináris fák bejárásai; Bináris keresőfa; Piros-fekete fa

1. (a) Építsen beszúrásokkal bináris keresőfát az alábbi sorrendben érkező számokból: 7,3,2,9,8,12,6,4.
(b) Milyen sorrendben írja ki a preorder, inorder és posztorder bejárás a csúcsokat?
(c) Szúrja be az (a) résznél adott fába az 5-t, aztán törölje ki a 2,6 és 7 elemeket.

2. Építsen piros-fekete fát az alábbi sorrendben érkező számokból: 1,2,3,5,4, 6.

3. Egy bináris keresőfa "valamely bejárásán" mindig a $\{pre,\ in,\ post\}$-order valamelyikét értjük.
(a) Mely bejárásoknál lehetséges az, hogy a tárolt elemek legnagyobbika megelőzi a legkisebbet?
(b) Tegyük fel, hogy egy bináris keresőfában az $1, 2, \ldots, n$ számok vannak tárolva, továbbá hogy a fa valamely bejárásánal a számok az $n, n-1, \ldots, 1$ sorrendben következnek. Határozzuk meg, melyik lehetett ez a bejárás és milyen lehetett ez a bináris keresőfa!

4. Egy bináris keresőfában csupa különböző egész számot tárolunk. Lehetséges-e, hogy egy KERES(x) hívás során a keresési út mentén a 20, 18, 3, 15, 5, 8, 9 kulcsokat látjuk ebben a sorrendben? Ha nem lehetséges, indokolja meg miért nem, ha pedig lehetséges, határozza meg az összes olyan x egész számot, amire ez megtörténhet.

5. Egy piros-fekete fában valamelyik, a gyökértől egy levélig vezető úton sorban az alábbi színű pontok vannak: fekete, piros, fekete, fekete. Mennyi a fában tárolt elemek számának a minimuma?

6. Egy bináris fa inorder bejárása:
$$j, b, k, g, i, a, c, d, f, e, h$$
preorder bejárása:
$$a, b, j, g, k, i, d, c, e, f, h.$$
Rekonstruáld a fát!

7. Adott egy n csúcsú és egy k csúcsú piros-fekete fa. A két fában tárolt összes elemből $O(n+k)$ lépésben készítsen egy rendezett tömböt.

---

8. Lehetséges-e, hogy egy piros-fekete fából a tárolt elemeket preorder bejárás szerinti sorrendben kiolvasva ezt kapjuk: 6, 1, 5, 3, 2, 4?

9. Tervezzen adatstruktúrát a következő feltételekkel. Természetes számokat kell tárolni, egy szám többször is szerepelhet. A szükséges műveletek:
BESZÚR(i): i egy újabb példányát tároljuk
TÖRÖL(i): i egy példányát töröljük
MINDTÖRÖL(i): i összes példányát töröljük
DARAB(i): visszaadja, hogy hány példány van i-ből
ELEM(K): megmondja, a nagyság szerinti rendezésben a K-adik elem értékét.
Az adatstruktúra legyen olyan, hogy ha m-*féle* elemet tárolunk, akkor mindegyik művelet lépésigénye $O(\log m)$.
(Például ha a tárolt elemek 1,1,3,3,3,8, akkor DARAB(1)=2, ELEM(4)=3 és m =3.)

10. (a) Építsen beszúrásokkal bináris keresőfát az alábbi sorrendben érkező számokból: 7,10,8,5,3,2,1.
(b) Milyen sorrendben írja ki a preorder, inorder és posztorder bejárás a csúcsokat?
(c) Törölje ki a 1,5 és 7 elemeket az (a) részben kapott fából.

11. Építsen piros-fekete fát az alábbi sorrendben érkező számokból: 7,8,2,10,5,4.

12. Adott n pont a síkon, melyek páronként mindkét koordinátájukban különböznek. Bizonyítsuk be, hogy egy és csak egy bináris fa létezik, melynek pontjai az adott n pont, és az első koordináta szerint a keresőfa tulajdonsággal, a második szerint pedig a kupac tulajdonsággal rendelkezik. (Vigyázat: a kupac tulajdonságba nem értendő bele, hogy a fa teljes bináris fa legyen, mint amilyet a tanult "kupacépítő" algoritmus létrehoz.)

13. Egy piros-fekete fában lehetséges-e, hogy a piros-fekete tulajdonság megsértése nélkül
(a) néhány piros csúcsot átváltoztathatunk feketére?
(b) valamelyik, de csak egy piros csúcsot átváltoztathatunk feketére?
(Mást nem változtatunk a fán.)