

10. gyakorlat
Leszámlálás, gráfok eleje

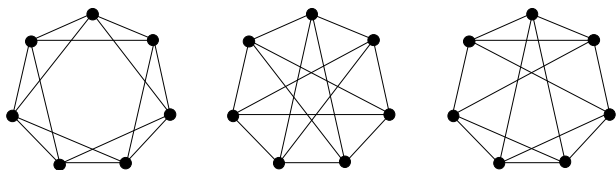
1. (a) Egy csomag francia kártyában 52 különböző lap és három teljesen ugyanolyan dzsoli található. Ha megkeverjük a kártyacsomagot, hányféle különböző sorrendje alakulhat ki a lapoknak? (ZH, 2002. december 5.)
 (b) Hányféleképpen lehet 8 szál (teljesen ugyanolyan) tulipánt szétosztani 5 különböző vázába? (A vázák közül akár bizonyosak üresen is maradhatnak.)
 (c) Hány részhalmaza van egy n elemű halmaznak?
 (d) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = ?$
2. Hány csúcsú az az egyszerű, teljes gráf, amelynek kevesebb éle van, mint a csúcsok számának hatszorosa, de több éle van, mint a csúcsok számának ötszöröse?

3. Egy BME hallgató Neptun-kódja egy olyan, 6 karakterből álló sorozat, amelynek minden tagja az angol ábécé 26 betűjének egyike, vagy a $0, 1, \dots, 9$ számjegyek valamelyike. Hány olyan Neptun-kód készíthető, amelynek legalább az egyik tagja betű? (ZH, 2004. december 9.)

4. Döntsd el, van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka rendre

(a) 1,2,2,3,3,3; (b) 1,1,2,2,3,4,4; (c) 2,3,3,4,5,6,7; (d) 1,3,3,4,5,6,6.

5. Vannak-e izomorfak az alábbi gráfok között?



6. Hányféleképpen ültethető kör alakú asztal köré n lovag? És ha Sir Lancelot és King Arthur egymás mellé kell, hogy kerüljenek?

7. $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots \pm \binom{n}{n} = ?$

8. Három barát beül sörözni egy helyre, ahol 7-féle sört csapolnak. Mindegyikük rendel egy korsóval. Hányféleképpen alakulhat a pincér tálcáján lévő sörök összetétele, ha (a) mindenki különböző sört rendel? (b) rendelhetnek ugyanolyan sört is?
9. Bizonyítsd be, hogy egy egyszerű gráf és a komplementere közül legalább az egyik mindig összefüggő!

10. (a) 5 házaspár ül egy padon. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni?
 (b) Margit néni minden héten 20 lottószelvénnel lottózik. Hányféleképpen töltheti ki egy héten a szelvényeit, ha persze nem akar két ugyanolyan szelvényt bedobni?
 (c) Az előre megszámozott (címkézett) n darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk? (ZH, 2000. december 7.)

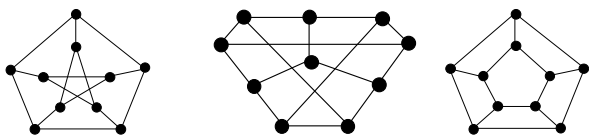
11. Rajzold fel az összes 3, 4, illetve 5 pontú fát! (Az izomorfakat csak egyszer.)

12. Hányféleképpen lehet eljutni az origóból a $(2,3,5)$ pontba, úgy, hogy csak egységnyi hosszú jobbra, fel és előre lépések lehetségesek?

13. Hány 60 csúcsú, 1768 élű, páronként nem izomorf egyszerű gráf létezik?

14. L. Ottó minden héten nyolc szelvénnel ötösloottózik. A szelvényeket teljesen taláalomra tölti ki, még arra sem figyel, hogy ne dobjon be két ugyanúgy kitöltött lottószelvényt. Hányféleképpen töltheti ki egy héten a nyolc lottószelvényt? (A kitöltött szelvények sorrendje természetesen közömbös. Az ötösloottóban 90 szám közül kell beikszelni öt különbözőt.) (ZH, 2002. december 5.)

15. A G gráf pontjai legyenek az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz 2 elemű részhalmazai; két csúcs akkor legyen szomszédos, ha a megfelelő részhalmazok diszjunktak. Az alábbi gráfok közül melyik (melyek) izomorf(ak) G -vel?



16. Egy n csúcsú gráf nem tartalmaz kört, a komponenseinek száma k . Hány éle van a gráfnak?