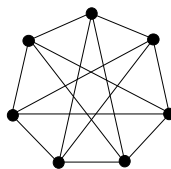


10. gyakorlat
Fák, síkbarajzolhatóság

1. A hat pontú teljes gráfból elhagyunk két élet. Lehet-e a maradék gráf síkbarajzolható? És ha 3 élet hagyunk el?
2. Van-e olyan konvex poliéder, melynek lapjai, élei és csúcsai száma egyaránt osztható 4-gyel? (ZH, 2003. december 17.)
3. Síkbarajzolhatóak-e az alábbi gráfok?

-
4. Tegyük fel, hogy $G = (V, E)$ egy olyan egyszerű gráf, aminek E élhalmaza előáll az E_1, E_2, E_3 diszjunkt élhalmazok uniójaként. Utóbbiakra teljesül, hogy a (V, E_1) , (V, E_2) és (V, E_3) részgráfok mindegyike G egy feszítőfája. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G nem síkbarajzolható. (ZH, 2005. december 8.)
 5. Egy síkságon öt ház és öt kút áll. Minden háztól minden kúthoz külön ösvényt kell építenünk. Az építendő ösvények némelyike keresztezheti egymást, de egy-egy kereszteződésben legfeljebb két ösvény találkozhat. Mutassuk meg, hogy ekkor kilencnél kevesebb kereszteződéssel biztosan nem megoldható a feladat.
 6. Egy gömbre rajzolt 6 tartományból álló 3-reguláris egyszerű gráfban mennyi az élek száma?
 7. Vegyünk egy 4-reguláris összefüggő gráfot a boltban és töröljük ki valahogyan egy feszítőfájának az éleit. Bizonyítsa be, hogy a maradék gráfban van legalább két kör.

-
8. Síkbarajzolhatóak-e az alábbi gráfok?



9. Egy 20 csúcsú konvex poliéder lapjainak száma 12. Hány oldala van az egyes lapoknak, ha tudjuk, hogy ez a szám minden lapra azonos?
10. Egy mezőn k ház és k kút áll. Minden háztól pontosan 5 (különböző) kúthoz vezet út (még hozzá közvetlenül, vagyis más házak vagy kutak érintése nélkül). Mutassuk meg, hogy biztosan van két olyan út, amelyek keresztezik egymást! (ZH, 2003. december 11.)
11. Bizonyítsd be, hogy minden egyszerű, síkbarajzolható gráfnak van olyan csúcsa, aminek a foka legfeljebb 5.
12. Egy fáról azt tudjuk, hogy 8 csúcsa van és fokszámai kétfélék. Mi lehet ez a kétféle érték?
13. Hány olyan hatjegyű szám létezik, amelyben van két azonos számjegy?
14. L. Ottó minden héten nyolc szelvényrel ötöslottózik. A szelvényeket teljesen taláalomra tölti ki, még arra sem figyel, hogy ne dobjon be két ugyanúgy kitöltött lottószelvényt. Hányféleképpen töltheti ki egy héten a nyolc lottószelvényt? (A kitöltött szelvények sorrendje természetesen közömbös. Az ötöslottóban 90 szám közül kell beikszelni öt különbözőt.) (ZH, 2002. december 5.)
15. Egy n pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$. Bizonyítsd be, hogy a gráf összefüggő!