2. gyakorlat
Altér, generálás, bázis, dimenzió

1. Döntsd el, hogy az $\mathbb{R}^4$ vektortérben alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok!

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_3 = 0 \right\}$; (b) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_2 = 1 \right\}$.

2. Legyen a szokásos 3 dimenziós térben ($\mathbb{R}^3$-ben) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $\underline{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Döntsd el az alábbi állításokról, hogy igazak-e ! (a) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független. (b) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{d}$ lineárisan független.

---

3. Döntsd el, hogy az alábbi állítások igazak-e a **2.** feladatban bevezetett $\mathbb{R}^3$-beli vektorokra!
   (a) $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$
   (b) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ generátorrendszer.
   (c) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ bázis.
   (d) $\underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ lineárisan független.
   (e) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{d}$ generátorrendszer.

4. Tegyük fel, hogy egy (tetszőleges) V vektortér $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ elemeire $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d} = \underline{0}$. Melyek igazak mindig az alábbi állítások közül? (a) $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle$; (b) $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$; (c) $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{d} \rangle$.

5. Legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független (egy tetszőleges vektortérben). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $\underline{a} - \underline{b}$, $\underline{a} - \underline{c}$, $\underline{b} + \underline{c}$ vektorrendszer is lineárisan független!

6. Adjuk meg $\mathbb{R}^3$ (a háromdimenziós valós tér) alábbi alterének egy bázisát:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 3x + 2y + z = 0 \right\}$$

---

7. Legyen $\mathbb{R}^4$-ben

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Döntsd el az alábbi állításokról, hogy igazak-e!
   (a) $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$
   (b) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ generátorrendszer
   (c) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ lineárisan független
   (d) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ bázis
   (e) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független
   (f) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ bázis

8. Döntsd el, hogy az $\mathbb{R}^4$ vektortérben alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok!
   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \right\}$; (b) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$.

9. Az a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3, b_4 vektorok generálják ugyanazt a V lineáris teret. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az alábbi négy vektorból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő: $a_1 + a_2, a_3 + b_1, a_3 + b_2, b_3 + b_4$.

10. A $P(1, -2, 5)$ és a $Q(7, 6, 1)$ pontoktól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a térben síkot határoz meg (a P és a Q felezőmerőleges síkját). Határozzuk meg ennek a síknak az egyenletét! (ZH, 2003. január 9.)

11. Bizonyítsuk be, hogy ha a V vektortérben az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ egy lineárisan független rendszer és $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_{k+1}$ pedig egy generátorrendszer, akkor a két vektorrendszer közül pontosan az egyik bázist alkot V-ben.

12. Döntsük el, hogy a $P(1, 4, 4)$ és a $Q(3, 12, -2)$ pontokon átmenő egyenes metszi-e a koordinátatengelyek valamelyikét! Ha a válasz igen, adjuk meg a metszésponto(ka)t! (ZH, 2006. november 9.)

13. Legyenek $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ lineárisan független vektorok. Adjuk meg a c paraméter összes olyan valós értékét, melyre a $\underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_2 - \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_{k-1} - \underline{v}_k, \underline{v}_k - c\underline{v}_1$ vektorok lineárisan függetlenek! (ZH, 1998. november 5.)

14. Tegyük fel, hogy $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 + \ldots + \underline{v}_{100} = \underline{0}$ és $\underline{v}_2 + \underline{v}_4 + \underline{v}_6 + \ldots + \underline{v}_{100} = \underline{0}$ teljesül a V vektortér $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{100}$ vektoraira. Jelöljük a $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{100} \rangle$ generált alteret W-vel. Bizonyítsd be, hogy $\dim W \leq 98$.