Csima Judit
csima@cs.bme.hu

3. gyakorlat
Dimenzió, Gauss-elimináció

1. Oldd meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket! Használd a Gauss-elimináció módszerét!

$$\begin{aligned} -x+3y+3z &= 2 \\ 3x+y+z &= 4 \\ 2x-2y+3z &= 10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+3y+2z &= 3 \\ 3x+5y+10z &= 5 \\ 3x+2y+13z &= 2 \\ 6x+13y+17z &= 13 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+3y+2z &= 3 \\ 3x+5y+10z &= 5 \\ 3x+2y+13z &= 2 \\ 6x+13y+17z &= 11 \end{aligned}$$

---

2. Döntsük el, hogy a c valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset! (ZH, 2004. december 14.)

$$\begin{aligned} -x+3y-z-3w &= -2 \\ 2x-6y+5z+12w &= 7 \\ 3x-9y+5z+cw &= 9 \end{aligned}$$

3. Az a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3, b_4 vektorok generálják ugyanazt a V lineáris teret. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az alábbi négy vektorból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő: $a_1+a_2, a_3+b_1, a_3+b_2, b_3+b_4$.

4. Lineárisan függetlenek-e az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli vektorrendszerek?

(a) $\begin{pmatrix}1\\3\\3\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\2\\13\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\10\\13\\17\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\5\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\5\\5\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\5\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\5\\4\end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix}7\\9\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}33\\\sqrt{2}\\5\\\sqrt{7}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-51\\19\\\sqrt[3]{19}\\44\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\9\\9\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\8\\5\end{pmatrix}$

---

5. Adjuk meg $\mathbb{R}^3$ (a háromdimenziós valós tér) alábbi alterének egy bázisát:

$$\left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : 3x+2y+z=0 \right\}$$

6. Adjuk meg a térben az alábbi egyenletekkel megadott S_1, S_2 és S_3 síkok (összes) metszéspontját! (ZH, 2001. október 31., 2004. december 20.)

(a) $\begin{aligned} S_1:\ x+y+z &= 6 \\ S_2:\ 2x+3y-2z &= 0 \\ S_3:\ 5x+7y-3z &= 6 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} S_1:\ 2x-y+5z &= 3 \\ S_2:\ 3x+2y+6z &= 4 \\ S_3:\ 4x-9y+13z &= 9 \end{aligned}$

7. A t paraméter mely valós értékeire lesz az alábbi három síknak egynél több közös pontja?

$$\begin{aligned} S_1:\ x+2y+z &= 4 \\ S_2:\ 2x+y+8z &= 5 \\ S_3:\ 5x+y+tz &= 11 \end{aligned}$$

8. Bizonyítsuk be, hogy ha a V vektortérben az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ egy lineárisan független rendszer és $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_{k+1}$ pedig egy generátorrendszer, akkor a két vektorrendszer közül pontosan az egyik bázist alkot V-ben.

9. Döntsük el, hogy a c valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszereknek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset! (ZH, 2004. november 4., 2006. október 26.)

(a) $\begin{aligned} 2x+6y+z &= -6 \\ 2x+11y+11z &= 14 \\ 4x+10y+cz &= -20 \\ 2x+9y+(c+10)z &= 6 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} -x_1-3x_2+x_3-4x_4 &= 1 \\ 5x_1+15x_2-2x_3+26x_4 &= 4 \\ 2x_1+6x_2+c\cdot x_4 &= 4 \\ 4x_1+12x_2+x_3+(c+14)\cdot x_4 &= 11 \end{aligned}$

10. Legyenek $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ a V (tetszőleges) vektortér lineárisan független vektorai. A p valós paraméter milyen értékeire teljesül, hogy az $\underline{a}=\underline{u}-\underline{v}$, $\underline{b}=\underline{u}+\underline{w}$, $\underline{c}=\underline{u}+\underline{v}-\underline{w}$, $\underline{d}=p\cdot\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}$ vektorok szintén lineárisan függetlenek? (ZH, 2004. december 14.)

11. Tekintsünk egy egész együtthatós lineáris egyenletrendszert (az egyenletekben a változók együtthatói és a jobb oldalon álló számok is egészek). Melyek igazak az alábbi állítások közül?
(a) Ha van megoldás a racionális számok körében, akkor van az egész számok körében is.
(b) Ha van megoldás a valós számok körében, akkor van a racionális számok körében is.