

7. gyakorlat  
Lineáris leképezések

1. Legyen  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$  az a függvény, amely a tér  $(x, y, z)$  vektorához a sík  $(x - y + z, x - y + z)$  vektorát rendeli.
- (a) Mutasd meg, hogy  $\mathcal{A}$  lineáris leképezés!  
(b) Határozd meg  $\text{Ker } \mathcal{A}$ -t és  $\text{Im } \mathcal{A}$ -t!  
(c) Legyen  $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  a tér,  $C = \{(1, 0), (0, 1)\}$  pedig a sík „szokásos” bázisa. Írd fel  $\mathcal{A}$  mátrixát a  $B$  és  $C$  bázisok szerint!
- 

2. Legyen  $V = \mathbb{R}^2$  a síkvektorok szokásos vektortere. Döntsd el, hogy az alábbi  $V$ -ről  $V$ -be menő hozzárendelések lineáris leképezések-e? Ha igen, add meg a kép- és magterüket! Minden  $\underline{v}$  vektornak feleltessük meg
- (a) az  $x$  tengelyre vett tükörképét;  
(b) azt az  $x$  tengelyre eső vektort, amelynek első koordinátája a  $\underline{v}$  koordinátái közül a nagyobb;  
(c) azt az  $x$  tengelyre eső vektort, amelynek első koordinátája a  $\underline{v}$  koordinátáinak összege;  
(d) a  $+90^\circ$ -kal való elforgatottját.
3. Írd fel az alábbi  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  lineáris leképezések mátrixát a „szokásos”  $\{(1, 0), (0, 1)\}$  bázisban!
- (a) az  $y$  tengelyre való tükrözés;  
(b) az origó körüli  $+60^\circ$ -os forgatás;  
(c) előbb egy  $y$  tengelyre való tükrözés, majd egy origó körüli  $+60^\circ$ -os forgatás.

4. Milyen leképezésekhez tartoznak az alábbi mátrixok a sík vektorterén?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

5. Jelölje  $V$  a valós számpárok (azaz a síkvektorok) szokásos vektorterét. Egy  $\mathcal{A} : V \mapsto V$  lineáris transzformációról tudjuk, hogy az  $(1, 2)$  vektorhoz a  $(6, 7)$  vektort, a  $(-1, 2)$  vektorhoz pedig a  $(8, 9)$  vektort rendeli. Írjuk fel  $\mathcal{A}$  mátrixát a „szokásos”, vagyis az  $(1, 0)$  és  $(0, 1)$  vektorokból álló bázisban! (ZH, 2002. december 12.)
6. Legyen  $\mathcal{A} : V \mapsto V$  olyan lineáris transzformáció, amire  $\text{Im } \mathcal{A} \subseteq \text{Ker } \mathcal{A}$ . Bizonyítsuk be, hogy az  $\mathcal{A}$  transzformáció (tetszőleges bázisban felírt)  $A$  mátrixára  $A^2 = 0$ . (ZH, 1997. november 1.)
- 

7. Döntsd el, hogy az alábbi  $\mathbb{R}^3$ -ről  $\mathbb{R}^2$ -be (vagyis a szokásos térről a szokásos síkba) menő hozzárendelések lineáris leképezések-e? Ha igen, add meg a kép- és magterüket, ezek dimenzióját, valamint írd fel a mátrixukat a „szokásos” bázisok (azaz  $\mathbb{R}^3$ -ben az  $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ,  $\mathbb{R}^2$ -ben az  $\{(1, 0), (0, 1)\}$ ) szerint!

$$\mathcal{A} : (x, y, z) \rightarrow (x, z) \quad \mathcal{B} : (x, y, z) \rightarrow (x \cdot y, x \cdot z) \quad \mathcal{C} : (x, y, z) \rightarrow (x + y, x + z)$$

8. Legyen  $V = \mathbb{R}^2$  a síkvektorok szokásos vektortere és legyen  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  egy lineáris transzformáció. Az  $\mathcal{A}$  mátrixa a  $\underline{b}_1 = (1, 1)$  és  $\underline{b}_2 = (1, -1)$  vektorokból álló bázisban felírva az alábbi:

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg  $x$  és  $y$  értékét, ha tudjuk, hogy  $(3, 1) \in \text{Ker } \mathcal{A}$ . (ZH, 2006. november 30.)

9. Legyen  $\mathcal{A}$  lineáris leképezés  $V_1$ -ről  $V_2$ -be,  $\underline{v}_i \in V_1$ . Melyek igazak az alábbi állítások közül?
- (a) Ha  $\mathcal{A}(\underline{v}_1) = \mathcal{A}(\underline{v}_2)$ , akkor  $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 \in \text{Ker } \mathcal{A}$ .  
(b) Ha  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$  generátorrendszer  $V_1$ -ben, akkor  $\mathcal{A}(\underline{v}_1), \dots, \mathcal{A}(\underline{v}_k)$  generátorrendszer  $V_2$ -ben.  
(c) Ha  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$  generátorrendszer  $V_1$ -ben, akkor  $\mathcal{A}(\underline{v}_1), \dots, \mathcal{A}(\underline{v}_k)$  generátorrendszer  $\text{Im } \mathcal{A}$ -ban.  
(d) Ha  $\mathcal{A}(\underline{v}_1), \dots, \mathcal{A}(\underline{v}_k)$  generátorrendszer  $\text{Im } \mathcal{A}$ -ban, akkor  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$  generátorrendszer  $V_1$ -ben.