

10. gyakorlat
Lineáris kongruenciák, műveletek, csoportok

1. **(ZH)** Bizonyítsuk be, hogy $\phi(n^3) = n^2\phi(n)$!
2. **(ZH)** Legyen értelmezve a valós számok halmazán az alábbi művelet: $a \times b = ab + a + b$. Vizsgáljuk meg, hogy asszociatív, kommutatív-e ez a művelet, van-e egységeleme, és hogy invertálható-e!
3. **(ZH)** Relatív prím-e a $2^{100} - 1$ és $3^{100} - 1$?
4. **(ZH)** Bizonyítsuk be, hogy $1 \times 19 \times 37 \times 55 \cdots \times 271 + 1$ osztható 17-tel!
5. Zárt-e az irracionális számok halmaza az összeadásra nézve? Zárt-e a pozitív racionális számok halmaza az osztásra? Van-e a pozitív racionális számok körében minden elemnek inverze a szorzásra nézve? Van-e a nemnegatív egészek körében minden számnak inverze az összeadásra nézve?
6. Milyen maradékot adhat x 72-vel osztva, ha $18x \equiv 12 \pmod{48}$
7. **(ZH)** Határozzuk meg az utolsó két számjegyét: 37^{3942} !
8. Mutassuk meg, hogy azok a mátrixok, melynek főátlóiban csupa egyesek állnak, bal alsó elemük 0, jobb felső elemük tetszőleges valós szám, azaz: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ csoportot alkotnak a mátrixszorzás műveletére nézve!
9. **(ZH)** Legyen G elemeinek halmaza $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a művelet pedig a $(\text{mod } 7)$ szorzás. Igazoljuk, hogy G ciklikus csoport!
10. Mely x -ekre teljesülnek az alábbi kongruenciák (egyszerre):
 $3x \equiv 2 \pmod{5}$
 $4x \equiv 1 \pmod{7}$
 $5x \equiv 1 \pmod{8}$
11. H halmaz elemei legyenek azok a 2×2 -es mátrixok, amelyek minden eleme ugyanaz a pozitív valós szám. Csoportot alkotnak-e H elemei a mátrixszorzásra nézve?
12. **(ZH)** Határozzuk meg az összes olyan $1 < n \leq 100$ természetes számot, melynek osztóinak száma háromhatvány!
13. **(ZH)** Tekintsük az $f(x) = ax + b$ alakú lineáris függvények halmazát, ahol a nem nulla valós, b pedig tetszőleges valós szám. Legyen a \circ művelet a függvények kompozíciója: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Igazoljuk, hogy erre a műveletre nézve ezek a függvények csoportot alkotnak. Mi a csoport egységeleme? Kommutatív-e a csoport?
14. Keressük meg 7 azon többszöröseit, melyek 13-mal osztva 11-et adnak maradékul!
15. **(ZH)** Egy 2000-ben születő embernek hány olyan születésnapja lesz 90 éves koráig, hogy az életkora osztója az aktuális évszámnak?
16. **(ZH)** Bizonyítsuk be, hogy $1998! + 111^{1998}$ osztható 1999-cel!
17. **(ZH)** Oldjuk meg a $6x + 1 \equiv 10 \pmod{15}$ kongruenciát!