11. gyakorlat
Elem rendje, ciklikus csoport, részcsoport, izomorfia

1. Értelmezzük az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazán az $a * b = a + b + 1$ képlettel megadott műveletet (lásd Kilencedik gyakorlat 1/d feladat). Bizonyítsd be, hogy a $(\mathbb{Z}, *)$ csoport izomorf a $(\mathbb{Z}, +)$ csoporttal, ahol $+$ a szokásos összeadást jelöli.

2. Döntsd el, hogy az alábbi H részhalmazok részcsoportot alkotnak-e a megfelelő G csoportban:
(a) G a komplex számok halmaza a szokásos összeadással, H a valós számok halmaza;
(b) G a komplex számok halmaza a szokásos szorzással, H az egységnyi abszolut értékű komplex számok halmaza;
(c) G az egész számok halmaza a szokásos összeadással, H a hárommal egy maradékot adó egészek halmaza.

3. Állapítsuk meg, hogy az alábbi két csoport izomorf-e egymással:
(a) a mod 4 maradékosztályok a mod 4 összeadással
(b) a mod 8 redukált maradékosztályok a mod 8 szorzással.

4. Határozd meg a D_8 diédercsoportban az alábbi elemek rendjét!

f_{45} $\qquad$ $f_{90} \cdot t_1$ $\qquad$ f_{90} $\qquad$ f_{135}

5. Egy csoport rendje 81 és van olyan eleme, melynek 27. hatványa nem az egységelem. Bizonyítsuk be, hogy a csoport kommutatív!

6. A G csoport $g \in G$ elemére $o(g) = 10$. Mennyi $o(g^3)$ értéke?

7. A H halmaz álljon az összes olyan rendezett számpárból, amelynek az első tagja egész szám, a második tagja 0 vagy 1. (Azaz: $H = \{(a, b) | a \in \mathbb{Z}, b \in \{0, 1\}\}$.) Értelmezzük H-n a $\oplus$ műveletet a következőképpen:
$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, (b_1 + b_2) \bmod 2).$$
(Azaz: a számpárokat tagonként összeadjuk és az eredmény második tagjának 2-es maradékát vesszük. Például: $(7, 1) \oplus (12, 1) = (19, 0)$.)
(a) Bizonyítsuk be, hogy H csoportot alkot a $\oplus$ műveletre nézve!
(b) Milyen rendű elemek fordulnak elő H-ban?
(c) Ciklikus csoport-e H?
(ZH, 2003. május 15.)

---

8. Legyen H és K egy G csoport két véges részcsoportja, melyekre teljesül, hogy $\text{lnko}(|H|, |K|) = 1$, vagyis H és K rendje relatív prímek. Mutassuk meg, hogy ekkor $H \cap K = \{e\}$, ahol e a G csoport egységeleme. (ZH, 2004. április 29.)

9. A valós számsorozatok halmaza csoportot alkot a számsorozatok összeadására, mint műveletre nézve (ezt könnyű ellenőrizni). Döntsd el, hogy az alábbi részhalmazok részcsoportot alkotnak-e ebben a csoportban?
(a) a konvergens számsorozatok halmaza;
(b) a divergens számsorozatok halmaza;
(c) a korlátos számsorozatok halmaza;
(d) a monoton növő számsorozatok halmaza.

10. Legyen G csoport, H és K pedig G-nek részcsoportjai. Mutassuk meg, hogy $H \cup K$ akkor és csak akkor részcsoportja G-nek, ha vagy $H \subseteq K$, vagy $K \subseteq H$. (ZH, 2002. június 4.)

11. Egy szabályos ötszög csúcsait számozzuk meg az óramutató járásával ellenkező irányban 1-től 5-ig. Jelölje t_i az i-edik csúcson, és a vele szemközti oldal felezőpontján átmenő tengelyre való tükrözést. Jelölje f_{72}, f_{144}, f_{216} és f_{288} az ötszög középpontja körüli, megfelelő szögű forgatást. Végül jelölje I az identitást. Végezd el a szabályos ötszög szimmetriacsoportjában az alábbi műveleteket!

$f_{144} \cdot t_1$ $\qquad$ $f_{72} \cdot t_2 \cdot f_{72} \cdot t_2$ $\qquad$ $(t_1 \cdot t_3)^{-1}$

12. Igazold, hogy egy páratlan rendű Abel-csoportban az összes elem szorzata az egységelem.

13. Van-e olyan 20 elemű csoport, amelyben
(a) van 5 rendű elem, de nincs 20 rendű elem;
(b) van 20 rendű elem, de nincs 5 rendű elem?
(ZH, 2003. április 30.)

14. (a) Mik az egyes elemek rendjei a 12 rendű ciklikus csoportban?
(b) Hány olyan eleme van a C_n ciklikus csoportnak, ami egymaga generálja a teljes C_n csoportot?