12. gyakorlat
Szimmetrikus csoport, mellékosztály, Lagrange-tétel; Gráfok szomszédossági és illeszkedési mátrixa

1. Végezd el az alábbi műveleteket az S_n szimmetrikus csoportban. Add meg az eredmény ciklusfelbontását és határozd meg a rendjét!

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $[(134)(342)]^{-1}$

   (b) $(35)(1432)(35)(1234)$ (d) $[(34)(23)(12)]^{2006}$

2. Határozd meg a megadott G csoportokban a H részcsoport szerinti baloldali- és jobboldali mellékosztályokat!
   (a) G az egész számok az összeadással; H a páros számok.
   (b) G a nemnulla valós számok a szorzással; $H = \{-1, 1\}$.
   (c) G a D_n diéder-csoport, H a D_n-beli forgatások részcsoportja.

3. Legyen A egy egyszerű irányítatlan gráf szomszédossági mátrixa. Mutassuk meg, hogy A^2 főátlóbeli elemeit összeadva páros számot kapunk!

---

4. Legyen A az n csúcsú G egyszerű irányítatlan gráf szomszédossági mátrixa. Mutassuk meg, hogy ha $A^2 + A$ minden eleme pozitív, akkor G összefüggő!

5. Mennyi ay irányított 3 hosszú kör illeszkedési mátrixának rangja?

6. Legyen G egy n-elemű csoport (n pozitív egész szám) és L ennek olyan részcsoportja, melynek G-beli indexe $\frac{n}{5}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor tetszőleges $H \in L$ elemre fennáll, hogy $h^{10} = e$, ahol e a G csoport egységeleme. (ZH, 2004. április 29.)

7. Döntsd el, hogy a megadott csoportokban baloldali mellékosztályt alkotnak-e (valamilyen részcsoport szerint) a megadott részhalmazok.
   (a) az egész számok csoportja az összeadással; a $8k + 5$ ($k \in \mathbb{Z}$) alakú egészek.
   (b) az egész számok csoportja az összeadással; a prímszámok.
   (c) D_{15}; $\{t_1 f_{24}, t_1 f_{144}, t_1 f_{264}\}$.
   (d) S_n; azok a permutációk, amik 1-hez 2-t rendelnek.

---

8. Határozzuk meg az
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 8 & 7 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
elem rendjét az S_8 szimmetrikus csoportban! (ZH, 2003. május 15.)

9. Melyik az a legkisebb pozitív egész n szám, amire az S_n szimmetrikus csoportnak van D_4-gyel, vagyis a negyedfokú diédercsoporttal izomorf részcsoportja? (ZH, 2004. április 29.)

10. Legyen G egy legalább 3 pontú csillag. Mennyi a determinánsa a G gráf szomszédossági mátrixának?

11. Bizonyítsd be, hogy az S_n csoport minden eleme felírható néhány kételemű ciklus szorzataként! (Itt a felírásban a ciklusoknak természetesen nem kell diszjunktnak lenni.)