Csima Judit
csima@cs.bme.hu

14. gyakorlat
Gyűrű, test, ferdetest, nullosztó

1. Döntsd el, hogy a megadott halmazok a rajtuk értelmezett $\oplus$ ”összeadás” és $\odot$ ”szorzás” művelettel gyűrűt, ferdetestet, illetve testet alkotnak–e?
(a) egy X halmaz összes részhalmazának $P(X)$ halmaza, $\oplus = \triangle$ (szimmetrikus differencia), $\odot = \bigcap$;
(b) Egy X halmaz összes részhalmazának $P(X)$ halmaza, $\oplus = \bigcup$, $\odot = \bigcap$;
(c) a valós számok halmaza, $a \oplus b = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$, $a \odot b = a \cdot b$ (hagyományos szorzás);
(d) a pozitív valós számok halmaza, $a \oplus b = a \cdot b$, $a \odot b = a^{\lg b}$.

2. A $\mathbb{Z}_{13}$ testben dolgozunk. Vezessük be az $\dfrac{a}{b}$ jelölést az $a \cdot b^{-1}$ szorzat helyett. Számítsd ki az alábbi műveletek eredményét!

(a) $\dfrac{1}{5}$ (b) $\dfrac{7}{9}$ (c) $\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{7}\right)$

3. Legyenek x_1 és x_2 baloldali nullosztók egy gyűrűben. Bizonyítsuk be, hogy $x_1 x_2$ is baloldali nullosztó, de $x_1 + x_2$ nem feltétlenül az!

4. Bizonyítsd be, hogy kommutatív testben minden elemnek legföljebb két négyzetgyöke lehet (vagyis az $x^2 = a$ egyenletnek legföljebb két megoldása lehet a test tetszőleges a elemére).

---

5. Tetszőleges (kommutatív) testben vezessük be az $\dfrac{a}{b}$ jelölést az $a \cdot b^{-1}$ szorzat helyett. Bizonyítsd be az alábbi azonosságokat!

(a) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ (b) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$

6. Döntsd el, hogy a $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ alakú valós mátrixok halmaza a hagyományos mátrixműveletekkel gyűrűt, ferdetestet, illetve testet alkot–e?

7. Legyen R egy nullosztómentes gyűrű. Bizonyítsuk be, hogy
(a) ha egy a elemre $a^2 = a$, akkor $a = 0$ vagy $a = 1$.
(b) ha egy a elemre $a^k = 0$ (egy k pozitív egészre), akkor $a = 0$.
(c) Mutassuk meg, hogy nem nullosztómentes gyűrűben a fentiek nem igazak!