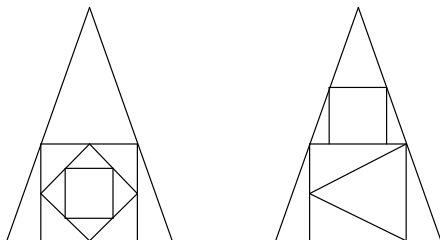


1. gyakorlat
Euler, Hamilton, utak, körök

1. Jelölje $S(n, k)$ azt a gráfot, melynek csúcsai az $n \times k$ -as sakktábla mezői, két csúcis pedig akkor szomszédos, ha a megfelelő mezők (oldaluk mentén) szomszédosak. Mely (n, k) értékekre van $S(n, k)$ -ban

(a) Euler-kör; (b) Euler-út; (c) Hamilton-út; (d) Hamilton-kör?

2. Ha lehet, rajzold le az alábbi ábrákat egy vonallal, a ceruza felemelése nélkül!



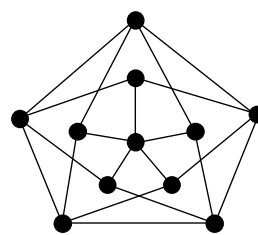
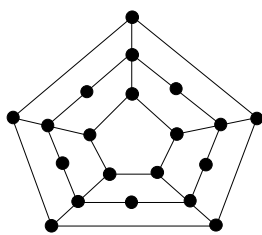
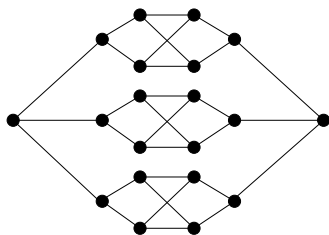
3. Bejárható-e egy 4×4 -es sakktábla lóval úgy, hogy minden mezőre éppen egyszer lépünk rá?

4. A G egyszerű gráfnak $2k + 1$ csúcsa van. Az egyik csúcs foka k , az összes többi csúcs foka legalább $k + 1$. Bizonyítsuk be, hogy G -ben van Hamilton-kör! (ZH, 2003. március 27.)

5. Egy 20 tagú társaságban mindenki ugyanannyi embert ismer a többiek közül. Bizonyítsd be, hogy le tudnak ülni egy kör alakú asztal köré vagy úgy, hogy mindenki mindkét szomszédját ismeri, vagy úgy, hogy senki sem ismeri egyik szomszédját sem.

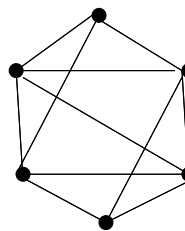
6. Igazold, hogy ha egy egyszerű gráf minden pontjának foka 4, akkor az élei kiszínezhetők piros és kék színekkel úgy, hogy (minden él teljes hosszában egy színű legyen és) minden ponthoz két piros és két kék él illeszkedjék.

7. Van-e Hamilton-kör az alábbi gráfokban? És Hamilton-út?



8. Igazold, hogy ha egy $2k + 1$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább k , akkor a gráfban van Hamilton-út!

9. (a) Legalább hány élet kell hozzávenni ehhez a gráfhoz, itt jobboldalt, hogy legyen benne Euler-kör?
(b) Legalább hány élet kell kitörölni, hogy legyen benne Euler-kör?



10. Bizonyítsd be, hogy ha egy n csúcsú egyszerű gráfnak legalább $\binom{n-2}{2} + n$ éle van, akkor van benne Hamilton-kör!

11. A tangótáncosok találkozáján 20 fiú és 20 lány vesz részt. Mindenki pontosan 12 embert ismer az ellenkező neműek közül (az ismeretségek kölcsönösek). A résztvevők a következőt játsszák: egy fiú kiválasztja egy lányismerősét és felkéri tangózni; az illető lány a tánc után kiválasztja egy másik fiúismerősét és felkéri tangózni, stb. A szabály tehát az, hogy akit legutóbb felkértek, az az ellenkező nemű ismerősei közül egy olyat kell felkérjen, akivel (ebben a játékban) még nem tangózott. (Akit felkérnek, az mindig el is fogadja a felkérést.) A társaság célja az, hogy végül mindenki elmondhassa magáról, hogy a játék során minden (ellenkező nemű) ismerősével pontosan egyszer tangózott. Mutassuk meg, hogy ez a cél megvalósítható! (ZH, 2005. május 9.)