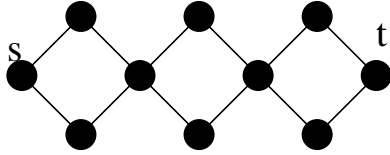


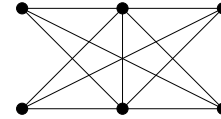
6. gyakorlat

Menger-tételek, pont- és élösszefüggőség

1. Az alábbi gráfban mennyi az s és t között futó pontdiszjunkt utak maximális száma? Hány csúccsal lehet lefogni az összes s - t utat? Mennyi az éldiszjunkt utak maximális száma? Hány éllel lehet lefogni az összes s - t utat?
2. Milyen k értékek esetén k -szorosán összefüggőek, illetve k -szorosán élösszefüggőek az alábbi gráfok?



- (a) egy 100 pontú út;
- (b) egy 100 pontú kör;
- (c) a $K_{10,20}$ teljes páros gráf;
- (d)



(e) az 1. feladat gráfja

3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf k -szorosán pontösszefüggő akkor k -szorosán élösszefüggő is.
4. Bizonyítsd be, hogy egy k -szorosán élösszefüggő, n pontú gráfnak legalább $\frac{kn}{2}$ éle van!
5. A G összefüggő, legalább 3 pontot tartalmazó gráfban minden v pontra és e élre teljesül az, hogy van v -n és e -n is átmenő kör. Mutassuk meg, hogy G kétszeresen pontösszefüggő.
6. Bizonyítsuk be, hogy minden háromszorosán összefüggő gráfban van páros hosszúságú kör! (ZH, 2003. június 5.)

7. Legyenek A , B és C diszjunkt, r elemű halmazok (ahol $r \geq 1$ egész). Készítsünk egy G gráfot úgy, hogy a csúcsainak halmaza legyen $A \cup B \cup C$ és két csúcsot akkor kössünk össze éllel, ha A , B és C közül nem ugyanabba a halmazba esnek. (A G gráf tehát elképzelhető úgy is, mint ha három, „egymás mellé rajzolt” r csúcsú teljes gráfból álló gráf komplementerét vennénk.) Határozzuk meg azt a maximális k számot, amelyre a G gráf k -szorosán összefüggő! (ZH, 2003. április 30.)
8. Bizonyítsd be, hogy egy 3-reguláris gráf akkor és csak akkor k -szorosán élösszefüggő, ha k -szorosán pontösszefüggő!
9. Legyen A és B a G gráf csúcsai halmazának két diszjunkt, egyenként legalább k elemű részhalmaza. Tegyük fel, hogy bárhogyan hagyunk el G -ből k -nál kevesebb pontot, a maradék gráfban van olyan út, amely A és B -beli pontokat köt össze. Bizonyítsd be, hogy ekkor létezik G -ben k darab (teljes egészében) pontdiszjunkt út úgy, hogy mindegyik A és B -beli pontokat köt össze!
10. Legyen $k \leq n - 1$. Bizonyítsd be, hogy ha egy n pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $\frac{n+k-2}{2}$, akkor a gráf k -szorosán összefüggő!
11. * Egy mátrix minden eleme 1-nél kisebb, nemnegatív valós szám. Tudjuk, hogy minden sorban és minden oszlopban az elemek összege egész. Bizonyítsd be, hogy a mátrix minden nemnulla elemét ki lehet cserélni 0-ra vagy 1-re úgy, hogy közben a sor- és oszlopösszegek változatlanok maradjanak!