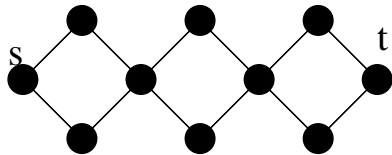


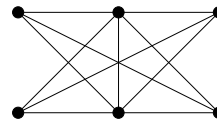
## 6. gyakorlat

### Menger-tételek, pont- és élösszefüggőség

1. Az alábbi gráfban mennyi az  $s$  és  $t$  között futó pontdiszjunkt utak maximális száma? Hány csúccsal lehet lefogni az összes  $s$ - $t$  utat? Mennyi az éldiszjunkt utak maximális száma? Hány éllel lehet lefogni az összes  $s$ - $t$  utat?



2. Milyen  $k$  értékek esetén  $k$ -szorosan összefüggőek, illetve  $k$ -szorosan élösszefüggőek az alábbi gráfok?
  - (a) egy 100 pontú út;
  - (b) egy 100 pontú kör;
  - (c) a  $K_{10,20}$  teljes páros gráf;
  - (d)



(e) az 1. feladat gráfja

3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf  $k$ -szorosan pontösszefüggő, akkor  $k$ -szorosan élösszefüggő is.
4. Bizonyítsd be, hogy egy  $k$ -szorosan élösszefüggő,  $n$  pontú gráfnak legalább  $\frac{kn}{2}$  éle van!
5. A  $G$  összefüggő, legalább 3 pontot tartalmazó gráfban minden  $v$  pontra és  $e$  élre teljesül az, hogy van  $v$ -n és  $e$ -n is átmenő kör. Mutassuk meg, hogy  $G$  kétszeresen pontösszefüggő.
6. Bizonyítsuk be, hogy minden háromszorosan összefüggő gráfban van páros hosszúságú kör! (ZH, 2003. június 5.)

7. Legyenek  $A$ ,  $B$  és  $C$  diszjunkt,  $r$  elemű halmazok (ahol  $r \geq 1$  egész). Készítsünk egy  $G$  gráfot úgy, hogy a csúcsainak halmaza legyen  $A \cup B \cup C$  és két csúcsot akkor kössünk össze éllel, ha  $A$ ,  $B$  és  $C$  közül nem ugyanabba a halmazba esnek. (A  $G$  gráf tehát elképzelhető úgy is, mint ha három, „egymás mellé rajzolt”  $r$  csúcsú teljes gráfból álló gráf komplementerét vennénk.) Határozzuk meg azt a maximális  $k$  számot, amelyre a  $G$  gráf  $k$ -szorosan összefüggő! (ZH, 2003. április 30.)
8. Bizonyítsd be, hogy egy 3-reguláris gráf akkor és csak akkor  $k$ -szorosan élösszefüggő, ha  $k$ -szorosan pontösszefüggő!
9. Legyen  $A$  és  $B$  a  $G$  gráf csúcsai halmazának két diszjunkt, egyenként legalább  $k$  elemű részhalmaza. Tegyük fel, hogy bárhogyan hagyunk el  $G$ -ből  $k$ -nál kevesebb pontot, a maradék gráfban van olyan út, amely  $A$  és  $B$ -beli pontokat köt össze. Bizonyítsd be, hogy ekkor létezik  $G$ -ben  $k$  darab (teljes egészében) pontdiszjunkt út úgy, hogy mindegyik  $A$  és  $B$ -beli pontokat köt össze!
10. Legyen  $k \leq n - 1$ . Bizonyítsd be, hogy ha egy  $n$  pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább  $\frac{n+k-2}{2}$ , akkor a gráf  $k$ -szorosan összefüggő!
11. \* Egy mátrix minden eleme 1-nél kisebb, nemnegatív valós szám. Tudjuk, hogy minden sorban és minden oszlopban az elemek összege egész. Bizonyítsd be, hogy a mátrix minden nemnulla elemét ki lehet cserélni 0-ra vagy 1-re úgy, hogy közben a sor- és oszlopösszegek változatlanok maradjanak!