

1. (a) Határozzuk meg az 504 és a 372 prímtényező felbontását!
- (b) Mennyi $(504, 372)$? És $lkkt(504, 372)$?
- (c) Mennyi $d(504)$ és $\sigma(504)$?

2. Ha $6x \equiv 42 \pmod{21}$, akkor az alábbiak közül mi igaz biztosan?

- | | | |
|---------------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| (a) $6x \equiv 0 \pmod{21}$ | (c) $12x \equiv 84 \pmod{21}$ | (e) $2x \equiv 14 \pmod{21}$ |
| (b) $6x + 2 \equiv 2 \pmod{21}$ | (d) $3x \equiv 21 \pmod{21}$ | (f) $2x \equiv 14 \pmod{7}$ |

3. Egy XX. században született emberről azt tudjuk, hogy épp nagyapja 59. születésnapján született és hogy kettejük születési évszámai nem relatív prímek. Mikor született az ember?
4. Legyen n páratlan egész szám, amely nem osztható egyetlen prímszám négyzetével sem. Bizonyítsuk be, hogy n pozitív osztóinak átlaga egész szám! (ZH, 2003. április 30.)
5. Bizonyítsuk be, hogy ha az $n > 1$ számnak 2005 osztója van, akkor n nem lehet egy egész szám ötödik hatványa. (ZH, 2005. május 6.)
6. Legyen n pozitív egész szám, melynek ismerjük $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ prímtényező felbontását. Mennyi a

$$\sum_{d_i|n} \frac{1}{d_i}$$

érték, vagyis hogyan számítható ki az n szám osztói reciprokanak az összege?

7. Hány olyan (pozitív) osztója van 3960-nak, amely 30 többszöröse?

8. Bizonyítsd be, hogy a

$$\frac{21n + 4}{14n + 3}$$

tört semmilyen nemnegatív egész n -re sem egyszerűsíthető.

9. (a) Egy perzsa sahnak 100 felesége van, a börtönében is épp 100 rab sínylődik, 1-től 100-ig számozott cellákban. A börtöncellák zárjai „kétállásúak”: ha egyet fordítanak rajtuk, a bezárt ajtó kinyílik, a nyitott ajtó bezáródik. A sah születésnapján a 100 feleség végigvonul a börtönön és a zárral játszanak. Az első feleség minden záron egyet fordít, a második feleség minden második ajtó zárján egyet fordít, stb., a k -edik feleség minden k -edik ajtó zárján egyet fordít, egészen a 100. feleségig. Végül azok a rabok, akiknek az ajtaja nyitva van, kiszabadulnak. Milyen sorszámú cellákban laknak a szerencsések?
- (b) A sah következő születésnapján a feleségek megint rosszkednek. Most az első feleség minden záron egyet fordít, a második feleség minden második ajtó zárján kettőt fordít, stb., a k -edik feleség minden k -edik ajtó zárján k -t fordít, egészen a 100. feleségig. Most milyen sorszámú cellák lakói szabadulnak?
10. Határozzuk meg a legkisebb olyan 3-mal nem osztható számot, amelynek 21 osztója van!
11. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c, d, e és f egész számokra

$$(a + b, c + d, e + f) | ace + bdf$$
 teljesül (ahol a gömbölyű zárójel a legnagyobb közös osztót jelöli).
12. Legyenek k és n olyan pozitív egészek, amelyekre $k < n$. Mi a legnagyobb közös osztója az $n! + k$ és az $(n + 1)! + k$ számoknak?