

1. Oldd meg az alábbi lineáris kongruenciákat!
 

(a)  $5x \equiv 2 \pmod{11}$  (11)      (b)  $26x \equiv 16 \pmod{34}$  (34)      (c)  $104x \equiv 74 \pmod{60}$  (60)      (d)  $40x \equiv 28 \pmod{62}$  (62)
  2. Milyen maradékot ad
 

(a)  $50^{50}$  11-gyel osztva;    (b)  $99!$  101-gyel osztva;    (c)  $2^{100}$  45-tel osztva;    (d)  $11^{11^{11}}$  7-tel osztva?
  3. (a) Egy százlábú meg akarja számolni a lábait. Azt tudja biológiából, hogy minden százlábúnak legföljebb 344 lába van. Ha 13-asával számolja a lábait, akkor 3 marad ki, ha 17-esével számolja, akkor viszont 10 marad ki. Hánylábú a százlábú?  
 (b) Egy másik százlábú is megirigyli ezt a módszert. Neki 16-osával számolva 5 marad ki, 20-asával számolva pedig 15 marad ki. Bizonyítsd be, hogy elszámolta magát!  
 (c) A százlábúak királyához is eljut a módszer. Neki 6-osával számolva 5 marad ki, 7-esével számolva 6, 8-asával számolva pedig 7. Neki hány lába van?
  4. Milyen maradékot adhat egy egész szám 92-vel osztva, ha az 54-szerese 24 maradékot ad 92-vel osztva? (ZH, 2003. április 30.)
  5. Bizonyítsuk be, hogy  $\phi(n^3) = n^2 \cdot \phi(n)$
- 
6. Mi az utolsó két számjegye az alábbi számoknak?
 

(a)  $303^{404}$       (c)  $17^{17^{17}} - 17^{17} + 17$  (ZH, 2003. május 22.)  
 (b)  $49^{49^{50}}$       (d)  $99! + 1$
  7. (a) Milyen számok állíthatók elő  $20x + 51y$  alakban, ahol  $x$  és  $y$  egész számok?  
 (b) Milyen számok állíthatók elő  $170x + 51y$  alakban, ahol  $x$  és  $y$  egész számok?  
 (c) Milyen számok állíthatók elő  $21x + 33y + 77z$  alakban, ahol  $x$ ,  $y$  és  $z$  egész számok?
  8. Oldd meg az alábbi lineáris kongruenciákat!
 

(a)  $30x \equiv 48 \pmod{58}$  (58)      (c)  $170x \equiv 78 \pmod{2006}$  (2006) (ZH, 2004. április 29.)  
 (b)  $39x \equiv 1 \pmod{100}$  (100)
  9. Mi az utolsó két számjegye az alábbi számoknak?
 

(a)  $2001^{2007}$       (b)  $99^{77^{55}}$       (c)  $51^{151}$
  10. Mutassuk meg, hogy  $61! + 1$  osztható 71-gyel! (ZH, 2002. május 2.)
  11. Határozzuk meg az  $x$  kétjegyű egész számot, ha tudjuk, hogy  $34x + 5$  utolsó két számjegye, valamint  $17x + 10$  utolsó két számjegye megegyezik. (ZH, 2005. május 5.)
  12. Bizonyítsuk be, hogy ha  $d$  osztója  $n$ -nek, akkor  $d - \varphi(d) \leq n - \varphi(n)$ .
  13. Egy háromjegyű számról tudjuk, hogy 23-mal osztva 4 maradékot ad, továbbá hogy a szám 16-szorosának utolsó két számjegye 28. Mi ez a szám?
  14. Pataki Ferenc fejszámolóművész egyszer a tévében a következő trükköt mutatta be: felkért a közönségből valakit, hogy gondoljon egy háromjegyű számra, szorozza meg 6561-gyel, majd az eredmény utolsó három jegyét közölje. Ebből ő pillanatok alatt kitalálta a gondolt számot. Hogyan csinálta? Utána tudnád-e csinálni, ha használhatsz számológépet, de csak nagyon rövid ideig?