

1. Döntsd el az alábbiakban megadott halmazokról és a rajtuk értelmezett műveletekről, hogy

- (i) a művelet asszociatív-e;
- (ii) van-e egységelem;
- (iii) mely elemeknek van inverze;
- (iv) csoportot alkot-e a halmaz a művelettel?

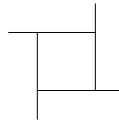
- (a) a síkvektorok halmaza; a síkvektorok összeadása.
- (b) egy tetszőleges  $X$  halmaz összes részhalmazainak halmaza; a halmazok uniója.
- (c) egy tetszőleges  $X$  halmaz összes részhalmazainak halmaza; a halmazok szimmetrikus differenciája. (Az  $A$  és  $B$  halmazok szimmetrikus differenciája alatt definíció szerint az  $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  halmazt értjük.)
- (d) az egész számok  $\mathbb{Z}$  halmaza; az  $a * b = a + b + 1$  képlettel megadott művelet.

2. A  $\clubsuit \diamond \heartsuit \spadesuit$  halmazon az ábrán megadott műveletet értelmezzük (pl.  $\diamond \times \diamond = \diamond$ ).

- (a) Mennyi  $((\spadesuit \times \diamond) \times \clubsuit) \times (\heartsuit \times \diamond)$ ?
  - (b) Kommutatív-e ez a művelet?
- Van-e egységelem? Mely elemeknek van inverze?

$\times$	$\clubsuit$	$\diamond$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$
$\diamond$	$\clubsuit$	$\diamond$	$\diamond$	$\diamond$
$\heartsuit$	$\clubsuit$	$\diamond$	$\heartsuit$	$\heartsuit$
$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\diamond$	$\heartsuit$	$\spadesuit$

3. Határozd meg az alábbi rajzok szimmetriacsoportját úgy, hogy nevet adsz elemeiknek és felírod a műveleti táblát (egy táblázatban minden elempárra megmondod, hogy mi a szorzatuk)! Mik az elemek rendjei? Ciklikusak-e a csoportok?



4. Mi az utolsó két számjegye az alábbi számoknak? (a)  $17^{17^{17}} - 17^{17} + 17$  (ZH, 2003. május 22.) (b)  $99! + 1$

5. Legyen  $G$  egy olyan csoport, amelyben minden elem négyzete (vagyis önmagával vett szorzata) az egységelem. Bizonyítsd be, hogy  $G$  Abel-csoport!

6. (a) Milyen számok állíthatók elő  $20x + 51y$  alakban, ahol  $x$  és  $y$  egész számok?  
 (b) Milyen számok állíthatók elő  $170x + 51y$  alakban, ahol  $x$  és  $y$  egész számok?

7. Csoportot alkotnak-e a szokásos szorzásra a valós és tiszta képzetes komplex számok a 0 nélkül, azaz csoport-e  $(X, \cdot)$ , ahol  $X = \{a \in \mathbb{R} : a \neq 0\} \cup \{ai : 0 \neq a \in \mathbb{R}\}$ , ill.  $\cdot$  a komplex számokon értelmezett szokásos szorzást jelöli? (ZH, 2006. május 4.)

8. Bizonyítsd be, hogy csoportban mindig megoldható az  $a \cdot x = b$  egyenlet! (Ez tehát azt jelenti, hogy egy tetszőleges  $G$  csoport minden  $a$  és  $b$  eleméhez található a csoportnak olyan  $x$  eleme, amelyre  $a \cdot x = b$  teljesül.)

9. Legyen  $H = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$  és értelmezzük a  $H$  halmazon a  $*$  műveletet az alábbi műveleti tábla szerint. (A táblázat szerint tehát például  $a * c = e$  és  $g * f = c$ .)

$*$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$
$a$	$d$	$g$	$e$	$a$	$c$	$h$	$b$	$f$
$b$	$g$	$d$	$h$	$b$	$f$	$e$	$a$	$c$
$c$	$e$	$h$	$a$	$c$	$d$	$b$	$f$	$g$
$d$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$
$e$	$c$	$f$	$d$	$e$	$a$	$g$	$h$	$b$
$f$	$h$	$e$	$b$	$f$	$g$	$a$	$c$	$d$
$g$	$b$	$a$	$f$	$g$	$h$	$c$	$d$	$e$
$h$	$f$	$c$	$g$	$h$	$b$	$d$	$e$	$a$

Döntsd el, hogy a  $H$  halmaz csoportot alkot-e a  $*$  műveletre nézve, ha azt már tudjuk, hogy  $*$  asszociatív! (Az asszociativitást nagyon lassú volna ellenőrizni.)

10. Döntsd el, hogy a megadott halmazok a rajtuk értelmezett művelettel csoportot alkotnak-e?

- (a) a  $(-1)$ -től különböző valós számok halmaza; az  $a * b = a \cdot b + a + b$  képlettel megadott művelet.
- (b) az  $n \times n$ -es, 1 determinánsú (valós) mátrixok halmaza; a mátrixszorzás.
- (c) az 5-tel nem osztható egész számok halmaza; az egész számok szorzása.
- (d) az 5-tel nem osztható egész számok halmaza; az egész számok összeadása.
- (e) páros számok, szokásos összeadás,
- (f) páros számok, szokásos szorzás,
- (g) nemnegatív egész számok, szokásos összeadás.